

4.3 Reelle Skalarprodukte, Hermitesche Formen, Orthonormalbasen

In diesem Abschnitt betrachten wir Vektorräume über \mathbb{R} und über \mathbb{C} . Ziel ist es, in solchen Vektorräumen “Längen” von Vektoren zu definieren.

Im \mathbb{R}^n gilt für das kanonische Skalarprodukt $(\beta(X, Y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k)$ stets die Ungleichung $\beta(X, X) > 0$, falls $X \neq 0$, und deshalb läßt sich dort die Länge eines Vektors als $\sqrt{\beta(X, X)}$ definieren. Im \mathbb{C}^n gilt $\sum_{k=1}^n x_k^2 > 0$ nicht mehr für alle $X = (x_1, \dots, x_n)$. Eine gegenüber Skalarprodukten etwas abgewandelte Terminologie erweist sich hier als brauchbarer.

Sesquilinearform

V sei ein Vektorraum über \mathbb{C} . Eine Abbildung $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Sesquilinearform**, falls gilt:

$$(H1) \quad \beta(aX + bY, Z) = a\beta(X, Z) + b\beta(Y, Z) \quad \forall X, Y, Z \in V, \forall a, b \in \mathbb{C}$$

$$(H2) \quad \beta(X, aY + bZ) = \bar{a}\beta(X, Y) + \bar{b}\beta(X, Z) \quad \forall X, Y, Z \in V, \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Beachte also: **Ein konstanter Faktor im zweiten Argument einer Sesquilinearform wird konjugiert komplex aus β herausgezogen.**

Spezielle Sesquilinearformen

1. Eine Sesquilinearform β heißt **hermitesche Form**, falls zusätzlich gilt:

$$(H3) \quad \beta(X, Y) = \overline{\beta(Y, X)} \quad \text{für alle } X, Y \in V.$$

2. Ist $V = \mathbb{C}^n$, so heißt die durch $\beta(X, Y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ definierte hermitesche Form die **kanonische hermitesche Form** auf dem \mathbb{C}^n .

Hermitesche Matrix

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ heißt **hermitesch**, falls gilt: $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top$.
Dabei ist $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{a_{kl}}) := (\bar{a}_{kl})$.

Es gilt:

1. Ersetzt man \mathbb{C} durch \mathbb{R} , so entspricht einer hermiteschen Form ein (reelles) Skalarprodukt (siehe Aufgabe 2).
2. Für eine hermitesche Form β gilt $\beta(X, X) \in \mathbb{R}$ für alle $X \in V$ (siehe Aufgabe 1).

Wie bei Bilinearformen kann man in endlich-dimensionalen Vektorräumen auch eine hermitesche Form β nach Auszeichnung einer Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ durch eine Matrix $\mathbf{B}_B(\beta) := (\beta(B_k, B_l))$ darstellen.

Zusammenhang zwischen hermiteschen Formen und Matrizen

Ist $B = (B_1, \dots, B_n)$ eine Basis von V und $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form, so heißt die Matrix $\mathbf{B}_B(\beta) := (\beta(B_k, B_l))$ **Matrix von β** (bezüglich der Basis B). Diese Matrix ist hermitesch.

Für $V = \mathbb{C}^n$ und $B = E$ schreiben wir $\mathbf{B}(\beta)$.

Ist umgekehrt $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitesch, so wird durch

$$\beta_{\mathbf{A}} : \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \rightarrow \mathbb{C} \\ (X, Y) & \mapsto X^\top \mathbf{A} \bar{Y} = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k \bar{y}_l \end{cases}$$

eine hermitesche Form definiert.

Die **Wirkung** von $\mathbf{B}_B(\beta)$ wird beschrieben durch:

$$\beta(X, Y) = (k_B(X))^\top \cdot \mathbf{B}_B(\beta) \cdot \overline{k_B(Y)}.$$

Die Transformationsformel lautet hier:

Transformationsformel

Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{C} , sind B und B' Basen von V und ist $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form, so gilt:

$$\mathbf{B}_{B'}(\beta) = (\mathbf{M}_B^{B'}(id))^\top \mathbf{B}_B(\beta) \overline{\mathbf{M}_B^{B'}(id)}.$$

Entsprechend der Kongruenz von Matrizen definiert man hier eine hermitesche Kongruenz:

Hermitesche Kongruenz

$\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ heißen **hermitesch kongruent**, falls eine invertierbare Matrix $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ existiert mit $\mathbf{C} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}$.

Wichtige Sätze

- Folgende Aussagen sind äquivalent:
 - \mathbf{A} ist hermitesch kongruent zu \mathbf{C} .
 - Es gibt eine invertierbare Matrix \mathbf{P} mit $\mathbf{C} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}}$.
 - Es gibt eine Basis B des \mathbb{C}^n mit $\mathbf{C} = \mathbf{B}_B(\beta_{\mathbf{A}})$.
- Jede hermitesche Matrix ist zu einer Diagonalmatrix hermitesch kongruent.

Hermitesche Matrizen über \mathbb{C} haben also analoge Eigenschaften wie symmetrische Matrizen über \mathbb{R} .

Positive Definitheit¹

Eine hermitesche Form (ein reelles Skalarprodukt) β auf V heißt **positiv definit**, falls gilt:

- (i) $\beta(X, X) \geq 0$ für alle $X \in V$ und
 (ii) $\beta(X, X) = 0 \iff X = 0$.

Für positiv definite hermitesche Formen (reelle Skalarprodukte) β kann man daher definieren:

Länge von X	:	$\ X\ $:=	$\sqrt{\beta(X, X)}$
Abstand von X und Y	:	$d(X, Y)$:=	$\ X - Y\ $

Schreibweise: Für positiv definite hermitesche Formen (reelle Skalarprodukte) β schreiben wir üblicherweise $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Orthonormalbasis

Ist $S \subseteq V$ ein Orthogonalsystem und gilt $\langle X, X \rangle = 1$ (d. h. $\|X\| = 1$) für alle $X \in S$, so heißt S ein **Orthonormalsystem**.

Ist S zusätzlich eine Basis von V , so heißt S **Orthonormalbasis** von V .

Existenz von Orthonormalbasen

Ist V ein Vektorraum über \mathbb{R} (\mathbb{C}) mit abzählbarer Basis und ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein positiv definites Skalarprodukt (eine positiv definite hermitesche Form), so besitzt V eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Orthogonale Basen werden wegen ihrer besonderen Eigenschaften häufig benutzt (man denke nur an das schon in der Schule eingeführte cartesische Koordinatensystem). In endlich-dimensionalen Vektorräumen und in Vektorräumen mit abzählbarer Dimension (siehe Aufgabe 12) mit positiv definitem Skalarprodukt lassen sich durch das folgende Verfahren Orthonormalbasen erzeugen.

¹ β ist ein reelles Skalarprodukt auf V bedeutet:
 V ist ein Vektorraum über \mathbb{R} und $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine symmetrische Bilinearform.

SCHMIDT'sches Orthogonalisierungsverfahren

Sei (A_1, \dots, A_n) linear unabhängig in V . $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei eine positiv definite hermitesche Form bzw. ein positiv definites reelles Skalarprodukt auf V .
Durch

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \\ B_2 &:= A_2 - \frac{\langle A_2, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 \\ B_3 &:= A_3 - \frac{\langle A_3, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2 \rangle}{\langle B_2, B_2 \rangle} B_2 \\ &\vdots \\ B_n &:= A_n - \frac{\langle A_n, B_1 \rangle}{\langle B_1, B_1 \rangle} B_1 - \dots - \frac{\langle A_n, B_{n-1} \rangle}{\langle B_{n-1}, B_{n-1} \rangle} B_{n-1} \end{aligned}$$

ist eine Orthogonalbasis (B_1, \dots, B_n) von $L(A_1, \dots, A_n)$ gegeben, für die außerdem gilt:

$$L(A_1, \dots, A_k) = L(B_1, \dots, B_k) \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

(C_1, \dots, C_n) mit $C_k := \frac{B_k}{\|B_k\|}$ für $k = 1, \dots, n$ ist dann eine Orthonormalbasis von $L(A_1, \dots, A_n)$.

4.3.1

Man zeige daß für jede Abbildung $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt:

- a)** Ist β eine hermitesche Form, so ist $\beta(X, X) \in \mathbb{R}$ für alle $X \in V$.
b) Erfüllt β (H1) und (H3), so erfüllt β auch (H2).

a) Sei $X \in V$ beliebig gegeben. Nach (H3) gilt $\beta(X, X) = \overline{\beta(X, X)}$. Gilt für eine komplexe Zahl z aber $z = \bar{z}$, so ist z reell. Also ist $\beta(X, X)$ reell.

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad \beta(X, aY + bZ) &= \overline{\beta(aY + bZ, X)} && \text{nach (H3)} \\ &= \overline{a\beta(Y, X) + b\beta(Z, X)} && \text{nach (H1)} \\ &= \bar{a} \overline{\beta(Y, X)} + \bar{b} \overline{\beta(Z, X)} && \text{Rechnen in } \mathbb{C} \\ &= \bar{a} \overline{\beta(X, Y)} + \bar{b} \overline{\beta(X, Z)} && \text{nach (H3)} \\ &= \bar{a} \beta(X, Y) + \bar{b} \beta(X, Z). \end{aligned}$$

4.3.2

Man zeige:

- a) Ist V ein Vektorraum über \mathbb{R} und gelten für $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ die Bedingungen (H1) und (H3), so ist β ein Skalarprodukt.
 b) Jede reelle hermitesche Matrix ist symmetrisch.

- a) Aus (H3) folgt

$$\beta(X, Y) = \overline{\beta(Y, X)} = \beta(Y, X),$$

da β nach \mathbb{R} abbildet. Also ist β symmetrisch. Die Linearität von β im zweiten Argument ergibt sich, da nach Aufgabe 1 aus (H1) und (H3) auch (H2) folgt und $a = \bar{a}$ für $a \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist β ein Skalarprodukt.

- b) Ist $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ hermitesch, so ist $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{A}^\top$.

Der Begriff der hermiteschen Form ist damit die kanonische Erweiterung des Begriffs des reellen Skalarprodukts auf Vektorräume über \mathbb{C} .

4.3.3

Man untersuche, welche der folgenden Matrizen hermitesch sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ ist hermitesch, denn es ist $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top$.

Man beachte: Hermitesche Matrizen haben in der Hauptdiagonale nur reelle Koeffizienten, denn nach Definition ist $a_{kk} = \overline{a_{kk}}$ ($k = 1, \dots, n$).

Die zweite Matrix ist nicht hermitesch, sondern symmetrisch. Für komplexe Matrizen sind hermitesch und symmetrisch **unterschiedliche** Begriffe.

Die letzte Matrix ist hermitesch, da wiederum $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top$ gilt. Für reelle Matrizen fällt also hermitesch mit symmetrisch zusammen.

4.3.4

Es sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix und $\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\beta(X, Y) := X^\top \mathbf{A} \overline{Y} = \sum a_{kl} x_k \overline{y_l}$.

Man zeige, daß β eine hermitesche Form ist.

Nach Aufgabe 2 genügt der Nachweis von (H1) und (H3).

Nachweis von (H1):

Für alle $X, Y, Z \in \mathbb{C}^n$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\beta(aX + bY, Z) = (aX + bY)^\top \mathbf{A} \overline{Z} = (aX^\top + bY^\top) \mathbf{A} \overline{Z} =$$

$$\begin{aligned}
&= aX^\top \mathbf{A}\bar{Z} + bY^\top \mathbf{A}\bar{Z} \\
&= a\beta(X, Z) + b\beta(Y, Z).
\end{aligned}$$

Nachweis von (H3):

$$\begin{aligned}
\overline{\beta(Y, X)} &= \overline{Y^\top \mathbf{A}\bar{X}} \stackrel{(1)}{=} \overline{(Y^\top \mathbf{A}\bar{X})^\top} = \overline{\bar{X}^\top \mathbf{A}^\top Y} \\
&\stackrel{(2)}{=} X^\top \overline{\mathbf{A}^\top Y} \stackrel{(3)}{=} X^\top \mathbf{A}\bar{Y} \\
&= \beta(X, Y).
\end{aligned}$$

Dabei gilt (1), da $Y^\top \mathbf{A}\bar{X}$ eine komplexe Zahl und damit gleich ihrer Transponierten ist. (2) gilt wegen $\overline{\bar{X}Y} = \overline{X\bar{Y}}$, und (3) gilt, da \mathbf{A} eine hermitesche Matrix ist.

Bemerkung: Für $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ erhält man $\beta(X, Y) = \sum x_k \bar{y}_k$ und damit die kanonische hermitesche Form auf dem \mathbb{C}^n .

4.3.5

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ sei eine hermitesche Matrix. Man zeige:

- a) \mathbf{A}^\top und $\overline{\mathbf{A}}$ sind hermitesch.
b) Ist \mathbf{A} invertierbar, so ist auch \mathbf{A}^{-1} hermitesch.

a) Zu zeigen ist $(\overline{\mathbf{A}^\top})^\top = \mathbf{A}^\top$ und $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^\top = \overline{\mathbf{A}}$.

Man macht sich zunächst sofort klar, daß die Reihenfolge von Konjugieren und Transponieren beliebig ist, und schließt dann:

$$(\overline{\mathbf{A}^\top})^\top = \overline{\mathbf{A}^{\top\top}} = \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^\top,$$

da \mathbf{A} hermitesch ist.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\mathbf{A}}}^\top &= \mathbf{A}^\top = (\overline{\mathbf{A}^\top})^\top \quad \text{da } \mathbf{A} \text{ hermitesch ist} \\
&= \overline{\mathbf{A}}.
\end{aligned}$$

b) Aus $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ folgt $\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{A}^{-1}} = \overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$.

Transponieren liefert $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top \cdot \overline{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{E}$, und da \mathbf{A} hermitesch ist, gilt

$$(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Analog folgt

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}^{-1}}^\top = \mathbf{E}.$$

$(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top$ ist damit invers zu \mathbf{A} , also gilt $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top = \mathbf{A}^{-1}$.

4.3.6

Ist \mathbf{A} eine komplexe (reelle) $n \times n$ -Matrix, so ist die Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top$ hermitesch (symmetrisch).
Ist \mathbf{A} invertierbar, so ist $\beta_{\mathbf{B}}$ positiv definit.

Man erhält direkt:

$$\overline{(\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top)}^\top = (\overline{\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}^\top})^\top = (\overline{\mathbf{A}}\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^\top \overline{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top.$$

Zum Beweis der positiven Definitheit von $\beta_{\mathbf{B}}$ für invertierbares \mathbf{A} :

Es ist

$$X^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top X = (\mathbf{A}^\top X)^\top (\mathbf{A}^\top X) = \sum_{k=1}^n z_k \overline{z_k},$$

falls $\mathbf{A}^\top X = (z_1, \dots, z_n) =: Z$. Da \mathbf{A} invertierbar ist, ist für $X \neq 0$ auch $Z \neq 0$. Die Behauptung folgt nun, da die kanonische hermitesche Form (das kanonische Skalarprodukt) positiv definit ist.

4.3.7

Man zeige:

- a) Jede hermitesche Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ ist zu einer Diagonalmatrix \mathbf{D} hermitesch kongruent.
b) Ist V ein Vektorraum über \mathbb{C} , $n = \dim V \in \mathbb{N}$ und β eine hermitesche Form auf V , so besitzt V eine bzgl. β orthogonale Basis B .

Wie bei reellen Skalarprodukten sind a) und b) äquivalent. Setzen wir nämlich a) voraus, und ist $C = (C_1, \dots, C_n)$ eine Basis von V und $\mathbf{A} := \mathbf{B}_C(\beta)$, so gibt es eine invertierbare Matrix $\mathbf{P} = (p_{kl})$, so daß $\mathbf{D} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{P}}$ eine Diagonalmatrix ist. Setze $B_l = \sum_{k=1}^n p_{kl} C_k$. Dann ist $B = (B_1, \dots, B_n)$ eine Basis von V , da die Koordinatenvektoren der B_l bzgl. C als Spalten von \mathbf{P} linear unabhängig sind. Ferner gilt $\mathbf{P} = \mathbf{M}_C^B(id)$. Nach der Transformationsformel folgt:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}_B(\beta) = (\beta(B_k, B_l)).$$

Somit ist B eine orthogonale Basis bzgl. β .

Umgekehrt folgt a) aus b), falls man in b) $V = \mathbb{C}^n$ und $\beta = \beta_{\mathbf{A}}$ wählt:

Schreibt man die Vektoren von B in die Spalten einer Matrix \mathbf{P} , so gilt nach der Transformationsformel $\mathbf{P}^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{B}_B(\beta_{\mathbf{A}})$, und $\mathbf{B}_B(\beta_{\mathbf{A}})$ ist eine Diagonalmatrix.

Wir zeigen nun a). Die wesentlichen Schritte zu diesem Beweis stehen schon in Aufgabe 4.1.8. Wegen $a_{lk} = \overline{a_{kl}}$ und wegen der hermiteschen Kongruenz (es soll $\mathbf{D} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{P}}$ gelten) ändert sich gegenüber Aufgabe 4.1.8 folgendes: Wenn wir

von links mit einer Elementarmatrix \mathbf{C} multiplizieren, also eine elementare Zeilenumformung durchführen, müssen wir von rechts stets mit $\overline{\mathbf{C}}^\top$ multiplizieren. $\overline{\mathbf{C}}^\top$ entspricht dann der zugehörigen "hermiteschen" Spaltenumformung:

Entspricht \mathbf{C} der Multiplikation von Zeile k mit $\alpha \in \mathbb{C}$, so entspricht $\overline{\mathbf{C}}^\top$ der Multiplikation von Spalte k mit $\overline{\alpha}$.

Entspricht \mathbf{C} der Addition des α -fachen von Zeile j zu Zeile k , so entspricht $\overline{\mathbf{C}}^\top$ der Addition des $\overline{\alpha}$ -fachen von Spalte j zu Spalte k .

Fall 3 des Verfahrens aus 4.1.8 ($a_{kk} = 0$ für alle k) ist wie folgt zu ergänzen: Wähle $a_{kl} \neq 0$ ($l \neq k$). Ist $\Re(a_{kl}) \neq 0$ (der Realteil von a_{kl}), so addiere die k -te Zeile zur l -ten Zeile und die k -te Spalte zur l -ten Spalte. Dann steht an der Stelle (l, l) die Zahl $a_{kl} + a_{lk} = a_{kl} + \overline{a_{kl}} = 2\Re(a_{kl}) \neq 0$, und man ist im Fall 2. Ist $\Re(a_{kl}) = 0$, so multipliziere die k -te Zeile mit i und die k -te Spalte mit $-i$ und verfähre dann wie bei $\Re(a_{kl}) \neq 0$.

Mit diesem Verfahren erhalten wir analog zu Aufgabe 4.1.8 die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_s \dots \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \overline{\mathbf{C}}_1^\top \dots \overline{\mathbf{C}}_s^\top = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \overline{\mathbf{P}}$$

mit

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_1^\top \dots \mathbf{C}_s^\top = (\mathbf{C}_s \dots \mathbf{C}_1)^\top.$$

4.3.8

Zu den folgenden Matrizen bestimme man jeweils eine invertierbare Matrix \mathbf{P} , so daß $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \overline{\mathbf{P}}$ eine Diagonalmatrix ist. Ferner bestimme man eine bzgl. $\beta_{\mathbf{A}}$ orthogonale Basis des \mathbb{C}^2 bzw. \mathbb{C}^3 .

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 4 & 2-3i \\ -2i & 2+3i & 7 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Es wird die Methode aus der vorigen Aufgabe verwendet.

Schematische Rechnung bei der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$:

1	i	1	0	i
$-i$	2	0	1	1
1	i	1	0	
0	1	i	1	

Die zugehörige hermitesche Spaltenumformung besteht nun darin, das $(-i)$ -fache der ersten Spalte zur zweiten Spalte zu addieren. Das liefert die Endmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 \end{array} \right).$$

Die jetzt rechts stehende Matrix ist die Matrix \mathbf{P}^\top . $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist also eine gesuchte Matrix.

Probe:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \overline{\mathbf{P}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Spalten von \mathbf{P} liefern eine bzgl. $\beta_{\mathbf{A}}$ orthogonale Basis.

b)

1	$1+i$	$2i$	1	0	0	$i-1$	$2i$
$1-i$	4	$2-3i$	0	1	0	1	
$-2i$	$2+3i$	7	0	0	1		1
1	$1+i$	$2i$	1	0	0		
0	2	$-5i$	$i-1$	1	0		
0	$5i$	3	$2i$	0	1		

Man beachte, daß die zugehörigen (hermiteschen) Spaltenumformungen im Prinzip nicht durchgerechnet werden müssen, da sich dadurch in der ersten Zeile lediglich zwei Nullen ergeben, aber sonst keine Änderungen eintreten. Ausnahmefall: Multiplikation der umgeformten Zeile mit $a \neq 0$.

1	0	0	1	0	0		
0	2	$-5i$	$i-1$	1	0	$-\frac{5}{2}i$	
0	$5i$	3	$2i$	0	1	1	
1	0	0	1	0	0		
0	2	0	$i-1$	1	0		
0	0	$-\frac{19}{2}$	$\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$	$-\frac{5}{2}i$	1		

Eine gesuchte Matrix \mathbf{P} lautet also:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & i-1 & \frac{5}{2} + \frac{9}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2}i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von \mathbf{P} liefern eine bzgl. $\beta_{\mathbf{A}}$ orthogonale Basis.

c)

0	0	$-i$	1	0	0	
0	0	0	0	1	0	
i	0	0	0	0	1	i
0	0	-1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	
-1	0	0	0	0	i	1
-2	0	-1	1	0	i	$-\frac{1}{2}$
0	0	0	0	1	0	
-1	0	0	0	0	i	1
-2	0	0	1	0	i	
0	0	0	0	1	0	
0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}i$	

Eine gesuchte Matrix \mathbf{P} lautet also:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von \mathbf{P} liefern eine bzgl. $\beta_{\mathbf{A}}$ orthogonale Basis.

4.3.9

Der Vektorraum \mathbb{R}^4 sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen. Man bestimme eine Orthonormalbasis für den Untervektorraum

$$U := L((1, 1, 0, 1), (1, -2, 0, 0), (1, 0, -1, 2)).$$

Es wird das SCHMIDTSche Orthogonalisierungsverfahren durchgeführt. Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} B_1 &= (1, 1, 0, 1); \\ B_2 &= (1, -2, 0, 0) - \frac{(1, -2, 0, 0) \cdot (1, 1, 0, 1)}{(1, 1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0, 1)} (1, 1, 0, 1) \\ &= \frac{1}{3} (4, -5, 0, 1); \\ B_3 &= (1, 0, -1, 2) - \frac{3}{3} (1, 1, 0, 1) - \frac{2}{\frac{14}{3}} \cdot \frac{1}{3} (4, -5, 0, 1) \\ &= \frac{1}{7} (-4, -2, -7, 6). \end{aligned}$$

Durch Normieren der Vektoren ergibt sich die folgende Orthonormalbasis B von U :

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{42}} (4, -5, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{105}} (-4, -2, -7, 6) \right).$$

4.3.10

Im \mathbb{R}^5 mit dem kanonischen Skalarprodukt sei

$$U := L((1, 2, 3, 1, 1), (1, 3, 2, 1, 2)).$$

Man bestimme Orthonormalbasen von U und U^\perp .

Das SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren liefert zunächst eine Orthogonalbasis von U .

$$\begin{aligned} B_1 &= (1, 2, 3, 1, 1); \\ B_2 &= (1, 3, 2, 1, 2) - \frac{16}{16}(1, 2, 3, 1, 1) = (0, 1, -1, 0, 1). \end{aligned}$$

Die Basis (B_1, B_2) wird nun zu einer Basis des \mathbb{R}^5 ergänzt, z. B. durch $(1, 0, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$ und $(0, 0, 1, 0, 0)$. (Nachrechnen!)

Diese Basis wird nun wieder orthogonalisiert, wobei das Verfahren sofort mit B_4 fortgesetzt werden kann, denn $B_3 = (1, 0, 0, -1, 0)$ ist schon so gewählt, daß $\langle B_1, B_3 \rangle = \langle B_2, B_3 \rangle = 0$ gilt.

$$\begin{aligned} B_4 &= (0, 1, 0, 0, 0) - \frac{2}{16}(1, 2, 3, 1, 1) - \frac{1}{3}(0, 1, -1, 0, 1) - 0 \cdot (1, 0, 0, -1, 0) \\ &= \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{12}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{8}, -\frac{11}{24}\right); \\ B_5 &= (0, 0, 1, 0, 0) - \frac{3}{16}(1, 2, 3, 1, 1) + \frac{1}{3}(0, 1, -1, 0, 1) + \\ &\quad + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{12}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{8}, -\frac{11}{24}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right). \end{aligned}$$

Normieren liefert nun:

$\left(\frac{1}{4}(1, 2, 3, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, -1, 0, 1)\right)$ ist eine Orthonormalbasis von U .

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1, 0), \frac{1}{4\sqrt{15}}(-3, 10, -1, -3, -11), \frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 0, 1, -2, 1)\right)$ ist eine Orthonormalbasis von U^\perp .

Da $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp$, haben wir auch eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^5 gefunden.

4.3.11

Der \mathbb{C}^4 sei mit der üblichen hermiteschen Form $\langle X, Y \rangle = \sum x_k \overline{y_k}$ versehen. Man bestimme eine Orthonormalbasis von

$$U := L((1, 0, i, -1), (0, 2, 1, -i), (i, -2, -2, 0)).$$

Es wird wieder das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren angewendet.

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (1, 0, i, -1); \\
 \langle B_1, B_1 \rangle &= \langle (1, 0, i, -1), (1, 0, i, -1) \rangle = 1 + i \cdot \overbrace{(-i)}^! + 1 = 3, \\
 B_2 &= (0, 2, 1, -i) - \frac{1}{3} \langle (0, 2, 1, -i), (1, 0, i, -1) \rangle (1, 0, i, -1) \\
 &= (0, 2, 1, -i); \\
 \langle B_2, B_2 \rangle &= 4 + 1 + (-i) \cdot i = 6, \\
 B_3 &= (i, -2, -2, 0) - \frac{1}{3} \langle (i, -2, -2, 0), (1, 0, i, -1) \rangle (1, 0, i, -1) \\
 &\quad - \frac{1}{6} \langle (i, -2, -2, 0), (0, 2, 1, -i) \rangle (0, 2, 1, -i) \\
 &= (i, -2, -2, 0) - (i, 0, -1, -i) + (0, 2, 1, -i) \\
 &= (0, 0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Da sich hier $B_3 = 0$ ergibt, folgt $B_3 \in L((1, 0, i, -1), (0, 2, 1, -i))$. Damit bilden B_1 und B_2 eine Orthogonalbasis von U . Normieren liefert hier die folgende Orthonormalbasis B von U :

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 0, i, -1), \frac{1}{\sqrt{6}} (0, 2, 1, -i) \right).$$

Hinweis: Die Lösung der Aufgabe zeigt, daß man bei der Anwendung des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens nicht unbedingt mit einer Basis von U beginnen muß. Bei der Durchführung des Verfahrens erkennt man, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind, und man läßt gegebenenfalls Vektoren B_k , die sich als Nullvektor ergeben, einfach fort.

4.3.12

Man zeige:

Ist V ein reeller (komplexer) Vektorraum mit abzählbarer Basis und ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein positiv definites Skalarprodukt (eine positiv definite hermitesche Form) auf V , so besitzt V eine Orthonormalbasis bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ferner gilt: Jedes endliche Orthonormalsystem S von V läßt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

Hat V endliche Dimension, so folgt die erste Behauptung aus Aufgabe 7.

Hat V unendliche Dimension, so liefert unsere Formulierung des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens, ausgehend von einer Basis $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ von V , Vektoren B_m ($m \in \mathbb{N}$) der Länge 1, die paarweise orthogonal sind und für die

$$L(A_1, \dots, A_m) = L(B_1, \dots, B_m) \text{ für jedes } m \geq 1$$

gilt. Damit folgt sofort, daß $\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist.

Ist $S = \{A_1, \dots, A_l\} \subseteq V$ ein Orthonormalsystem, also insbesondere linear unabhängig, so ergänze S durch A_{l+1}, A_{l+2}, \dots zu einer Basis von V und wende das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren an. Nach Voraussetzung über S folgt: $B_1 = A_1, \dots, B_l = A_l$. Damit ist $\{B_1, \dots, B_n\}$ (im Falle $\dim V = n$) bzw. $\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von V , die S enthält.

4.3.13

a) Man zeige:

Im Vektorraum $V = C[-\pi, \pi]$ der auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ stetigen reellen Funktionen definiert

$$\langle g, h \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} g(t)h(t) dt$$

ein positiv definites Skalarprodukt.

b) Man betrachte den von den Funktionen c_k und s_k mit $c_k(t) = \cos kt$ und $s_k(t) = \sin kt$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) erzeugten Unterraum U von V . Für U gebe man eine Orthogonalbasis und eine Orthonormalbasis an.

a) Seien $f, g, h \in V$.

1. Die **Symmetrie** $\langle g, h \rangle = \langle h, g \rangle$ folgt aus $g(t) \cdot h(t) = h(t) \cdot g(t)$ ($t \in \mathbb{R}$).
2. Die **Bilinearität** ergibt sich aus der Linearität des Integrals zusammen mit dem Distributivgesetz $(f + g)h = fh + gh$.
3. Die **positive Definitheit** folgt aus einem Satz der Analysis:

Ist f stetig auf $[a, b]$ und $f(t) \neq 0$ für ein $t \in [a, b]$ (d. h. $f \neq 0$), so gilt

$$\int_a^b (f(t))^2 dt > 0.$$

b) Integrationskenntnisse aus der Analysis führen zu der *Behauptung*:

Die Funktionen $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cos 3t, \sin 3t, \dots$ bilden eine Orthogonalbasis von U .

Zunächst gilt für $k \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kt dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kt dt = 0.$$

Für $k_1 \neq k_2$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1 t \cdot \cos k_2 t \, dt = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1 t \cdot \sin k_2 t \, dt = 0 \quad ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin k_1 t \cdot \sin k_2 t \, dt = 0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin k_1 t \cdot \cos k_1 t \, dt = 0 \quad .$$

Dies entnimmt man einer Formelsammlung oder leitet es durch partielle Integration selbst her.

Damit ist die angegebene Behauptung bewiesen.

Eine Orthonormalbasis erhält man dann durch Normieren. Dazu wird berechnet:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt = 2\pi \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \, dt = \pi \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt \, dt = \pi \quad .$$

Die letzten beiden Gleichungen gelten für $k \geq 1$. Damit erhält man durch $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, \dots$ mit

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad e_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt \quad , \quad e_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \quad (k \in \mathbb{N})$$

eine Orthonormalbasis von U .

Bemerkung: Die angegebene Orthogonalbasis wird in der Analysis benutzt zur Approximation von periodischen Funktionen durch trigonometrische Funktionen. Dies führt zur Theorie der **Fourier-Reihen**.

4.3.14

Der Vektorraum der Polynome über \mathbb{R} sei mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) \, dt$$

versehen.

- a) Man bestimme eine Orthonormalbasis des Unterraumes $L(1, x, x^2, x^3)$.
- b) Man berechne in diesem Vektorraum den Abstand von $f = 1 + x$ und $g = x^2 - 1$.

a) Es wird das SCHMIDTSche Orthogonalisierungsverfahren angewendet und zunächst eine Orthogonalbasis bestimmt.

(Der aufmerksame Leser denkt an Aufgabe 4.1.7.)

$$B_0 = 1 \quad ,$$

$$B_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x \quad ,$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= x^2 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x^2 - \frac{1}{3}, \\
B_3 &= x^3 - \frac{\langle x^3, x^2 - \frac{1}{3} \rangle}{\langle B_2, B_2 \rangle} (x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{\langle x^3, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x - \frac{\langle x^3, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 \\
&= x^3 - \frac{3}{5} x.
\end{aligned}$$

Nun wird noch normiert. Dazu werden die folgenden Skalarprodukte berechnet, die teilweise bei der Berechnung der B_i schon benötigt wurden:

$$\begin{aligned}
\langle B_0, B_0 \rangle &= \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \, dx = 2 \\
\langle B_1, B_1 \rangle &= \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} \\
\langle B_2, B_2 \rangle &= \langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3} \rangle = \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 \, dx = \frac{8}{45} \\
\langle B_3, B_3 \rangle &= \langle x^3 - \frac{3}{5}x, x^3 - \frac{3}{5}x \rangle = \frac{24}{7 \cdot 75} = \frac{8}{175}.
\end{aligned}$$

Als Orthonormalbasis von $L(1, x, x^2, x^3)$ erhält man damit:

$$E_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} x^0; \quad E_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} x^1; \quad E_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1); \quad E_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (5x^3 - 3x).$$

Bemerkung: Teilt man E_n jeweils durch $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$, so erhält man die sog. **LEGENDRE-Polynome**

$$q_n := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

b) Für den Abstand $d(f, g)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
d(f, g) = \|f - g\| &= \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle} = \left(\int_{-1}^1 (x^2 - x - 2)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{32}{5}}.
\end{aligned}$$

4.3.15

- a) Der Vektorraum V über \mathbb{C} (über \mathbb{R}) sei mit der positiv definiten hermiteschen Form (dem positiv definiten Skalarprodukt) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen. Man beweise: Ist (A_1, \dots, A_n) eine Orthonormalbasis von V , so gilt für alle $X, Y \in V$:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle X, A_k \rangle \overline{\langle Y, A_k \rangle}$$

- b) Man bestimme die sich in a) ergebende Gleichung für den Fall, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n , $(A_1, \dots, A_n) = E$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n , $X \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor und $Y = X$ ist.
- c) Es sei U der von den Funktionen c_k und s_k mit

$$c_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad s_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

erzeugte Untervektorraum des Vektorraums $C[-\pi, \pi]$ der stetigen reellen Funktionen von $[-\pi, \pi]$ nach \mathbb{R} mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 13. Wie lautet die Gleichung in a) in diesem Falle für $X = Y = f \in U$?

- a) Sei $Y = \sum y_k A_k$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \left\langle X, \sum_{k=1}^n y_k A_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle X, y_k A_k \rangle \quad \text{nach Aufgabe 2 b)} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle X, A_k \rangle \overline{y_k} \quad \text{nach Aufgabe 2 c)}. \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\langle Y, A_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k A_k, A_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n y_k \underbrace{\langle A_k, A_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = y_j.$$

Setzt man dies in die vorige Zeile ein, so folgt die zu beweisende Gleichung

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle X, A_k \rangle \overline{\langle Y, A_k \rangle}.$$

Bemerkung: Diese Gleichung heißt **PARSEVALSche Gleichung**.

b) Mit $X = Y$ folgt zunächst

$$\langle X, X \rangle = \sum_{k=1}^n \langle X, E_k \rangle \overline{\langle X, E_k \rangle} = \sum_{k=1}^n x_k \bar{x}_k \quad \text{nach a),}$$

und wenn X nur reelle Komponenten hat, dann gilt $\langle X, X \rangle = \sum x_k^2$.

Bemerkung: $x_k = \langle X, E_k \rangle$ bedeutet unter der Voraussetzung, daß das übliche Skalarprodukt vorliegt:

$$x_k = |X| \cdot |E_k| \cdot \cos \sphericalangle(X, E_k).$$

Wegen $|E_k| = 1$ und $|X| = 1$ erkennt man $x_k = \cos \sphericalangle(X, E_k)$, und damit folgt insgesamt der (bekannte) Satz:

Für jeden reellen Vektor ist die Summe der Kosinusquadrate der Winkel mit den Achsen gleich 1.

c) In der angegebenen Aufgabe 13 wurde gezeigt, daß die Funktionen c_k und s_k mit

$$c_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt; \quad s_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

eine Orthonormalbasis eines Untervektorraumes U des Vektorraumes $C[-\pi, \pi]$ der reellen Funktionen von $[-\pi, \pi]$ nach \mathbb{R} bilden. Also ist die Aufgabe sinnvoll gestellt, und man erhält hier die folgende PARSEVALSche Gleichung für den Spezialfall $X = Y = f \in U$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right)^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right)^2.$$