

3.3 Lineare Unabhängigkeit, Basen, Dimension

Die Definition der folgenden Begriffe wird aus Abschnitt 2.3 wortwörtlich für allgemeine Vektorräume übernommen.

siehe Abschnitt 2.3	Linearkombination lineare Hülle linear unabhängig und linear abhängig Erzeugendensystem Basis
---------------------	--

Es folgen einige wichtige Sätze über Vektorräume.

Wichtige Sätze über Vektorräume

1. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
2. Alle Basen eines Vektorraumes sind gleichmächtig.
3. **Basisergänzungssatz**
In einem Vektorraum läßt sich jede linear unabhängige Menge zu einer Basis ergänzen.
4. **Austauschsatz** von STEINITZ
Ist B eine Basis vom Vektorraum V und $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge, so gibt es eine Teilmenge $T \subseteq B$ derart, daß $(B \setminus T) \cup S$ eine Basis von V ist.

Wegen der Sätze 1 und 2 läßt sich generell die **Dimension** eines Vektorraumes als gemeinsame Mächtigkeit aller seiner Basen definieren.

Im Falle endlicher Dimension ist die Dimension gegeben durch die Anzahl der Basiselemente.

Zur Erinnerung wird die Definition der linearen Unabhängigkeit einer Menge wiederholt.

Lineare Unabhängigkeit einer Menge

Eine Teilmenge T eines Vektorraumes V heißt linear unabhängig, wenn je endlich viele Vektoren aus T linear unabhängig sind.

3.3.1

Für die folgenden Mengen $S \subseteq K^n$ bestimme man Basen der linearen Hülle $L(S)$, und ergänze diese zu einer Basis des K^n .

- a) $S := \{(-2, 3, 1, -1), (0, 1, -1, 0), (6, 2, 0, 3), (6, 0, 2, 3)\}, \quad K^n := \mathbb{R}^4$
 b) $S := \{(1, i, 2+i), (i, 1, 2-i), (2i, 0, -1-i)\}, \quad K^n := \mathbb{C}^3$
 c) $S := \{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}, \quad K^n := (\mathbb{Z}_2)^4$
 d) $S := \{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 0)\}, \quad K^n := (\mathbb{Z}_3)^3$

Wir werden bei dieser Aufgabe zunächst jeweils durch die Bestimmung des Rangs der aus den Vektoren gebildeten Matrix erkennen können, welche Dimension der Raum $L(S)$ besitzt. Danach erkennt man, oder entscheidet wieder mit Hilfe von Rangbestimmungen, welche Basis $L(S)$ besitzt.

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht hier schon, daß die drei ersten Spalten der Matrix linear unabhängig sind, also hat die Matrix den Rang 3. Streicht man nun jeweils die letzte Zeile der Matrizen, so erkennt man, daß die verbleibende letzte Matrix den Rang 3 besitzt. Also bilden die Vektoren $(-2, 3, 1, -1)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(6, 2, 0, 3)$ eine Basis von $L(S)$.

Eine Basisergänzung kann man, ausgehend von einer beliebigen Basis, stets nach dem Austauschsatz von STEINITZ vornehmen (siehe dazu Aufgabe 2.3.4). Das einfachste Verfahren zur Basisergänzung besteht hier aber darin, zu den drei Vektoren einen Einheitsvektor des K^n hinzuzunehmen, und dann auf lineare Unabhängigkeit zu testen. Dabei zeigt die obige Matrixumformung, daß man den Vektor $(0, 0, 0, 1)$ hinzunehmen sollte. Dann erhält man nämlich

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und die letzte Matrix hat den Rang 4. Damit bilden die vier Vektoren der ersten Matrix eine Basis des \mathbb{R}^4 .

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 2+i \\ i & 1 & 2-i \\ 2i & 0 & -1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 2+i \\ 0 & 2 & 3-3i \\ 0 & 2 & 1-5i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 2+i \\ 0 & 2 & 3-3i \\ 0 & 0 & -2-2i \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 3. Damit bilden die angegebenen Vektoren eine Basis von $L(S)$ und gleichzeitig vom \mathbb{C}^3 .

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 3, die drei Vektoren bilden eine Basis von $L(S)$. Will man diese Basis zu einer Basis vom $(\mathbb{Z}_2)^4$ ergänzen, so nehme man einen Einheitsvektor hinzu. Die obenstehende Matrixumformung zeigt, daß bei Hinzunahme von $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ als vierte Zeile die resultierende Matrix den Rang 4 hat. Die neue letzte Zeile wird nämlich von der ausgeführten Rechnung nicht berührt. Damit ist

$$(1, 1, 1, 0), \quad (0, 1, 1, 1), \quad (1, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0)$$

eine Basis vom $(\mathbb{Z}_2)^4$.

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat den Rang 2. Eine Basis von $L(S)$ ist z. B. $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 2)$. Mit dem Vektor $(1, 0, 0)$ kann man zu einer Basis vom $(\mathbb{Z}_3)^3$ ergänzen, denn schreibt

man diese Vektoren als Matrix, so erkennt man, daß die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

den Rang 3 besitzt.

3.3.2

Gegeben seien

$$U_1 := L((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)),$$

$$U_2 := L((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)),$$

$$U_3 := L((1, i, 1 - 2i), (-1, 1, 3), (-i, i + 1, 1)).$$

a) Man bestimme $\dim U_i$ ($i = 1, 2, 3$) über \mathbb{R} .

b) Man bestimme $\dim U_1$ und $\dim U_2$ über $K = \mathbb{Z}_2$.

c) Man bestimme $\dim U_3$ über \mathbb{C} .

a) Wir überprüfen zunächst jeweils, ob die Vektoren linear unabhängig sind. In diesem Falle ist die Dimension von U_i durch die Anzahl der angegebenen erzeugenden Vektoren gegeben. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Um dies noch einmal deutlich zu machen, benutzen wir bei jedem Unterraum ein anderes Verfahren.

n Vektoren im K^n sind linear unabhängig genau dann, wenn die aus ihnen gebildete Determinante $\neq 0$ ist.

Dies wenden wir bei U_1 an.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Also gilt $\dim U_1 = 3$.

m Vektoren im K^n sind linear unabhängig genau dann, wenn die aus ihnen gebildete Matrix den Rang m besitzt.

Hier erhalten wir bei U_2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Rang der Matrix ist also 4. Damit sind die Vektoren linear unabhängig und es gilt $\dim U_2 = 4$.

Definition der linearen Unabhängigkeit; siehe Seite 44

Die Definition benutzen wir zur Bestimmung von $\dim U_3$.

Sei also

$$\alpha(1, i, 1 - 2i) + \beta(-1, 1, 3) + \gamma(-i, i + 1, 1) = (0, 0, 0),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sein müssen. Man erhält das LGS

$$\begin{aligned} \alpha - \beta - i\gamma &= 0 \\ i\alpha + \beta + (i+1)\gamma &= 0 \\ (1-2i)\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Wir addieren die ersten beiden Gleichungen und anschließend das 3-fache der ersten Gleichung zur dritten Gleichung.

$$\begin{aligned} (i+1)\alpha + \gamma &= 0 \\ (4-2i)\alpha + (1-3i)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Hier folgt aus der ersten Gleichung sofort $\alpha = \gamma = 0$, da für α und γ nur reelle Zahlen zugelassen sind. Dann ist aber auch $\beta = 0$. Die Vektoren sind also linear

unabhängig, und es ist $\dim U_3 = 3$.

c) Wir lösen nun zunächst c), da wir die letzte Rechnung dafür fortführen können. Läßt man im obigen LGS nämlich $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ zu, so erkennt man wegen $(3i - 1)(i + 1) = 4 - 2i$, daß die letzten beiden Gleichungen jeweils Vielfache voneinander sind. Über \mathbb{C} ist der Rang der Koeffizientenmatrix also höchstens 2, das LGS ist nicht-trivial lösbar (z. B. durch $\alpha = -1, \beta = -i, \gamma = 1 + i$). Damit sind die Vektoren über \mathbb{C} linear abhängig. Da aber z. B. $(1, i, 1 - 2i)$ und $(-1, 1, 3)$ linear unabhängig über \mathbb{C} sind, folgt jetzt $\dim U_3 = 2$.

b) Über $K = \mathbb{Z}_2$ gilt $(1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 0)$, also ist jetzt $\dim U_1 \leq 2$. $(1, 0, 1)$ und $(1, 1, 0)$ sind linear unabhängig über \mathbb{Z}_2 . Es folgt $\dim U_1 = 2$. Entsprechend gilt $(1, 1, 0, 0) + (1, 0, 1, 0) = (0, 1, 1, 0)$. Die Vektoren

$$(1, 1, 0, 0) \quad (1, 0, 1, 0) \quad (1, 0, 0, 1)$$

sind über \mathbb{Z}_2 linear unabhängig, da der Rang der aus ihnen gebildeten Matrix 3 ist, also gilt $\dim U_2 = 3$ über \mathbb{Z}_2 .

3.3.3

Man untersuche, ob im Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die drei Funktionen f, g, h mit $f(x) := x, g(x) := |x|$ und $h(x) := \sqrt{x^2 + 1}$ linear unabhängig sind.

Drei Funktionen f, g, h sind linear unabhängig genau dann, wenn sich aus ihnen die Nullfunktion nur trivial linear kombinieren läßt, wenn also gilt:

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0 \quad \implies \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Dabei bezeichnet die 0 links vom Pfeil die Nullfunktion. Mit der links stehenden Gleichung ist also gemeint, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten soll:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$

Wir werden hier die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Funktionen zeigen. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von Funktionen geht man nun folgendermaßen vor. Wenn die obige Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten soll, erzeugt man durch geeignete **Spezialisierung** von x drei Gleichungen in den Variablen α, β, γ , wobei geeignete Spezialisierung bedeutet, daß dieses LGS nur die triviale Lösung besitzt. Folgt nämlich durch Spezialisierung schon $\alpha = \beta = \gamma = 0$, so folgt natürlich aus $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$ erst recht $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Wir setzen hier der Reihe nach $x = 0, x = 1$ und $x = -1$, und erhalten das LGS

$$\begin{array}{rcl} & & \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \sqrt{2}\gamma & = & 0 \\ -\alpha + \beta + \sqrt{2}\gamma & = & 0 \end{array}$$

Die erste Gleichung zeigt sofort $\gamma = 0$. Durch Addition der letzten beiden Gleichungen folgt $\beta = 0$ und damit dann auch $\alpha = 0$. Also läßt sich die Nullfunktion aus f, g und h nur trivial kombinieren, d. h. die Funktionen sind linear unabhängig.

3.3.4

Es sei V der Vektorraum der Polynome vom Grade ≤ 3 über \mathbb{R} .

a) Man zeige, daß

$$B = \{x^3 - 2x + 3, x^3 - 2x^2 + 2x - 1, x^3 - 1, x^3 - 2x + 5\}$$

eine Basis von V ist.

b) Es sei $f = x^3 - x^2 + 1, g = x^2 - 2x + 2$. Man ergänze $\{f, g\}$ durch 2 Vektoren aus B zu einer Basis von V .

Der Vektorraum V_n der Polynome vom Grade $\leq n$ über \mathbb{R} besitzt die Dimension $n + 1$. Für diesen Vektorraum bilden nämlich die $n + 1$ Polynome $1, x, x^2, \dots, x^n$ eine Basis, die sog. kanonische Basis dieses Vektorraumes. Diese Polynome erzeugen trivialerweise den Vektorraum V_n . Sie sind auch linear unabhängig, denn Polynome sind linear unabhängig genau dann, wenn sich aus ihnen das Nullpolynom nur auf triviale Art linear kombinieren läßt. Der Ansatz

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0,$$

bei dem rechts das Nullpolynom steht, liefert durch Koeffizientenvergleich direkt $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, da Polynome genau dann gleich sind, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen.

a) Der hier gegebene Vektorraum V hat die Dimension 4. Es reicht daher, zu zeigen, daß die vier gegebenen Vektoren linear unabhängig sind. Der Ansatz

$$\alpha(x^3 - 2x + 3) + \beta(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) + \gamma(x^3 - 1) + \delta(x^3 - 2x + 5) = 0$$

führt durch Sortierung auf der linken Seite zu

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + (-2\beta)x^2 + (-2\alpha + 2\beta - 2\delta)x + (3\alpha - \beta - \gamma + 5\delta) = 0,$$

wobei rechts das Nullpolynom steht. Durch Koeffizientenvergleich erhält man also ein Gleichungssystem, bei dem die zweite Gleichung sofort $\beta = 0$ liefert. Berücksichtigt man das, so verbleibt das folgende LGS:

$$\begin{array}{rcccc} \alpha & + & \gamma & + & \delta & = & 0 \\ -2\alpha & & & - & 2\delta & = & 0 \\ 3\alpha & - & \gamma & + & 5\delta & = & 0 \end{array}$$

Durch Addition des zweifachen der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung erhält man $\gamma = 0$, und damit ergeben die letzten beiden Gleichung dann unmittelbar $\alpha = \delta = 0$. Das Nullpolynom ist aus den gegebenen Polynomen also

nur trivial kombinierbar, d. h. die Polynome sind linear unabhängig.

b) f und g sind linear unabhängig, so daß die Aufgabe sinnvoll gestellt ist. Zur Basisergänzung kann man den Austauschsatz von STEINITZ benutzen (siehe dazu Aufgabe 2.3.4). Einfacher geht es hier durch genauere Betrachtung der gegebenen Polynome. Man erkennt nämlich

$$f + g = x^3 - 2x + 3 \quad \text{und} \quad f - g = x^3 - 2x^2 + 2x - 1,$$

d. h. $f + g$ und $f - g$ sind Elemente der gegebenen Basis. Also muß man f, g durch die anderen beiden Vektoren aus B zu einer Basis von V ergänzen.

$$B' = \{f, g, x^3 - 1, x^3 - 2x + 5\}$$

ist eine gesuchte Basis von V .

3.3.5

Es sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome über \mathbb{R} .

a) Man bestimme die Dimension von

$$U = L(1 + x + x^5, x^2 + x^4, 1 - x^2 + x^3 - x^5, x - x^3 - x^4 + 2x^5)$$

b) Es seien $f = x + x^2 - x^3 + 2x^5$ und $g = 2 + x + x^3 + x^4$.

Man zeige: $f, g \in U$ und f, g sind linear unabhängig.

a) Wegen $x - x^3 - x^4 + 2x^5 = (1 + x + x^5) - (x^2 + x^4) - (1 - x^2 + x^3 - x^5)$ gilt $\dim U \leq 3$.

Wir zeigen nun, daß die Polynome $1 + x + x^5$, $x^2 + x^4$ und $1 - x^2 + x^3 - x^5$ linear unabhängig sind. Sei dazu

$$\alpha(1 + x + x^5) + \beta(x^2 + x^4) + \gamma(1 - x^2 + x^3 - x^5) = 0,$$

wobei rechts das Nullpolynom steht. Polynome sind gleich, wenn sie koeffizientenweise übereinstimmen. Hier reicht schon der Koeffizientenvergleich bei den Potenzen x, x^3 und x^4 . Man erhält dadurch der Reihe nach $\alpha = 0, \gamma = 0$ und $\beta = 0$. Damit gilt $\dim U = 3$.

b) Durch "scharfes Hinsehen" erkennt man:

$$f = x + x^2 - x^3 + 2x^5 = (1 + x + x^5) - (1 - x^2 + x^3 - x^5) \in U$$

$$g = 2 + x + x^3 + x^4 = (1 + x + x^5) + (x^2 + x^4) + (1 - x + x^3 - x^5) \in U$$

Die lineare Unabhängigkeit von f und g ergibt sich daraus, daß die Polynome unterschiedlichen Grad besitzen. Besitzen nämlich zwei Polynome (die beide vom Nullpolynom verschieden sind) unterschiedlichen Grad, so sieht man bei der Durchführung des in a) ausgeführten Koeffizientenvergleichs sofort, daß das Nullpolynom nur trivial aus ihnen linear kombinierbar ist.

Die hier angeführte Tatsache läßt sich zur Aussage der folgenden Aufgabe verallgemeinern.

3.3.6

Es sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome über \mathbb{R} .

- a) $\{p_1, \dots, p_k\}$ sei eine linear unabhängige Menge von Polynomen aus $\mathbb{R}[x]$ und $n := \max \{\text{grad}(p_1), \dots, \text{grad}(p_k)\}$. Ferner sei $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\text{grad} p > n$. Man zeige, daß $\{p_1, \dots, p_k, p\}$ linear unabhängig ist.
- b) Es sei $\{p_1, \dots, p_k\}$ eine Menge von Polynomen aus $\mathbb{R}[x]$ mit $0 \leq \text{grad}(p_1) < \dots < \text{grad}(p_k)$. Man zeige, daß $\{p_1, \dots, p_k\}$ linear unabhängig ist.
- c) Man zeige, daß $\mathbb{R}[x]$ keine endliche Dimension besitzt.

a) Es sei

$$(*) \quad \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k + \lambda p = 0 \quad (\text{Nullpolynom}).$$

Dann folgt zunächst $\lambda = 0$. Wäre nämlich $\lambda \neq 0$, so ergäbe

$$\lambda p = -\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2 - \dots - \lambda_k p_k$$

einen Widerspruch, da das Polynom λp einen Grad $> n$ besitzt, das Polynom $-\lambda_1 p_1 - \dots - \lambda_k p_k$ dagegen als Linearkombination von Polynomen mit Graden $\leq n$ einen Grad $\leq n$ besitzt.

Mit $\lambda = 0$ folgt aus (*) wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{p_1, \dots, p_k\}$ dann aber $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Aus (*) folgt also insgesamt $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, und damit ist $\{p_1, \dots, p_k, p\}$ linear unabhängig.

b) Wir führen den Beweis durch *vollständige Induktion* über k .

Der Induktionsanfang für $k = 1$ ist trivial, da ein Polynom vom Grade 0 nicht das Nullpolynom ist und ein vom Nullvektor verschiedener Vektor nach Definition linear unabhängig ist.

Der Induktionsschluß ergibt sich unmittelbar aus Teil a) dieser Aufgabe.

c) Angenommen $\mathbb{R}[x]$ besitzt endliche Dimension. Dann existiert eine Basis aus endlich vielen Elementen. Es sei o. B. d. A. diese Basis durch p_1, p_2, \dots, p_k gegeben und $n := \max \{\text{grad}(p_1), \dots, \text{grad}(p_k)\}$. Nach a) sind dann die Polynome p_1, \dots, p_k, x^{n+1} linear unabhängig und das ist ein Widerspruch zur Annahme, daß p_1, \dots, p_k eine Basis ist.

Aus der Lösung dieser Aufgabe ergibt sich, daß die Polynome $1, x, x^2, x^3, \dots$ eine Basis vom Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ bilden, da sie ihn trivialerweise erzeugen und nach b) je endlich viele von ihnen linear unabhängig sind. Also ist $\mathbb{R}[x]$ ein Beispiel eines unendlich-dimensionalen Vektorraumes mit abzählbarer Basis.

3.3.7

Man zeige: Im Vektorraum \mathbb{R} über dem Körper \mathbb{Q} sind $1, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ linear unabhängig.

Es sei $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Wir müssen zeigen, daß $a = b = c = 0$ gilt. Zunächst folgt $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a$ und durch Quadrieren

$$2b^2 + 3c^2 + 2bc\sqrt{6} = a^2.$$

Wäre $bc \neq 0$, so wäre $\sqrt{6}$ rational, und das ist ein Widerspruch. Also ist $bc = 0$.

1. Fall: $b = 0$

Ist $b = 0$, so folgt $a + c\sqrt{3} = 0$. Dann muß $c = 0$ gelten, sonst wäre $\sqrt{3}$ rational. Damit folgt aber auch $a = 0$.

2. Fall: $c = 0$

Dann ist $a + b\sqrt{2} = 0$, also $b = 0$, da sonst $\sqrt{2}$ rational wäre. Auch hier folgt dann noch $a = 0$.

3.3.8

Ist $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Körper, $a \in K, a \geq 0$, so sei

$K[\sqrt{a}] := \{\alpha + \beta\sqrt{a} \mid \alpha, \beta \in K\}$ und (falls $a_1, \dots, a_n \geq 0$)

$K[\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}] := K[\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{n-1}}][\sqrt{a_n}]$.

Man zeige, daß $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ein Vektorraum über \mathbb{Q} ist und bestimme eine Basis von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

In der Aufgabe 3.1.17 wurde gezeigt, daß $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist, der \mathbb{Q} enthält. Entsprechend folgt allgemeiner, daß $K[\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}]$ ein Körper ist, der den Körper $K[\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_{n-1}}]$ enthält. Damit ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ein Vektorraum über \mathbb{Q} . Es bleibt eine Basis zu bestimmen. Nach Definition gilt:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{(\alpha + \beta\sqrt{2}) + (\gamma + \delta\sqrt{2})\sqrt{3} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}\}$$

Wegen $(\alpha + \beta\sqrt{2}) + (\gamma + \delta\sqrt{2})\sqrt{3} = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$ erzeugt die Menge $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ diesen Vektorraum. Wir zeigen noch, daß B linear unabhängig ist. Sei dazu

$$0 = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6} = \alpha + \beta\sqrt{2} + (\gamma + \delta\sqrt{2})\sqrt{3}.$$

Wir betrachten die Fälle $\gamma + \delta\sqrt{2} = 0$ und $\gamma + \delta\sqrt{2} \neq 0$.

Ist $\gamma + \delta\sqrt{2} = 0$, so folgt $\gamma = \delta = 0$, denn sonst müßte $\gamma \neq 0$ und $\delta \neq 0$ sein, woraus folgen würde, daß $\sqrt{2}$ rational wäre. Genauso folgt dann auch $\alpha = \beta = 0$.

Ist $\gamma + \delta\sqrt{2} \neq 0$, so erhält man

$$\sqrt{3} = \frac{-(\alpha + \beta\sqrt{2})}{\gamma + \delta\sqrt{2}}, \quad \text{also} \quad \sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Dies führen wir zum Widerspruch. Gilt nämlich $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, so gilt $b \neq 0$, da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, und auch $a \neq 0$, da $\sqrt{3} : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Quadrieren liefert $3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$, also $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, da $ab \neq 0$. Dies ist der Widerspruch!

3.3.9

$V = \mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \{f \mid f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}\}$ sei Vektorraum über \mathbb{R} . \bar{z} sei die zu z konjugiert komplexe Zahl.

$$I := \{f \in V \mid f(\bar{z}) = -f(z)\} \quad R := \{f \in V \mid f(\bar{z}) = f(z)\}$$

Man zeige, daß I und R Untervektorräume von V sind.

Ändert sich das Ergebnis, wenn V als Vektorraum über \mathbb{C} aufgefaßt wird?

Für die Nullfunktion 0 gilt natürlich $0(\bar{z}) = -0(z)$ und $0(\bar{z}) = 0(z)$, da alle Funktionswerte gleich 0 sind. Damit folgt $0 \in I$ und $0 \in R$.

Beweis von (U2):

Es seien $f, g \in I$. Dann folgt

$$(f + g)(\bar{z}) = f(\bar{z}) + g(\bar{z}) = -f(z) - g(z) = -(f + g)(z),$$

also $f + g \in I$.

Sind $f, g \in R$, dann gilt

$$(f + g)(\bar{z}) = f(\bar{z}) + g(\bar{z}) = f(z) + g(z) = (f + g)(z),$$

also auch $f + g \in R$.

Beweis von (U3):

Ist $f \in I$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt

$$(\alpha f)(\bar{z}) = \alpha f(\bar{z}) = -\alpha f(z) = -(\alpha f)(z),$$

d. h. $\alpha f \in I$.

Für $f \in R$, α wie oben, folgt $(\alpha f)(\bar{z}) = \alpha f(z) = (\alpha f)(z)$, also auch $\alpha f \in R$.

I und R sind also Untervektorräume von $V = \mathbb{R}^{\mathbb{C}}$, und zwar unabhängig davon, ob V als Vektorraum über \mathbb{R} oder über \mathbb{C} aufgefaßt wird, wie der Beweis von (U3) zeigt.

3.3.10

Man beweise, daß der Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (über \mathbb{R}) keine abzählbare Basis besitzt.

Der Beweis ist eine schöne Anwendung der VANDERMONDESchen Determinante (siehe Aufgabe 2.6.10).

Wir betrachten das offene Intervall $I := (0, 1)$ reeller Zahlen, welches bekanntlich nicht abzählbar ist, und definieren für jedes $a \in I$ eine Funktion $f_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_a(n) := a^n$. Sei $\mathcal{B} := \{f_a \mid a \in I\}$.

Behauptung: \mathcal{B} ist linear unabhängig.

Eine Familie \mathcal{B} ist linear unabhängig genau dann, wenn je endlich viele Elemente aus \mathcal{B} linear unabhängig sind.

Seien also f_{a_1}, \dots, f_{a_m} m beliebige Elemente aus \mathcal{B} , und sei

$$\lambda_1 f_{a_1} + \lambda_2 f_{a_2} + \dots + \lambda_m f_{a_m} = 0 \quad (a_1, \dots, a_m \text{ paarweise verschieden!}).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\lambda_1 f_{a_1}(n) + \dots + \lambda_m f_{a_m}(n) = 0$$

Insbesondere gilt also für $n = 0, 1, 2, \dots, m-1$:

$$\lambda_1 a_1^n + \lambda_2 a_2^n + \dots + \lambda_m a_m^n = 0$$

Somit ist $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}X = 0$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \dots & a_m^{m-1} \end{pmatrix}.$$

\mathbf{A}^\top ist die VANDERMONDE-Matrix. Nach der genannten Aufgabe 2.6.10 gilt

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top = \prod_{1 \leq k < l \leq m} (a_l - a_k) \neq 0,$$

da die a_j paarweise verschieden sein sollten. Also ist das LGS $\mathbf{A}X = 0$ nur trivial lösbar, d. h. $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (0, \dots, 0)$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von f_{a_1}, \dots, f_{a_m} gezeigt, also auch die lineare Unabhängigkeit von \mathcal{B} .

Da \mathcal{B} überabzählbar ist, kann dann keine abzählbare Basis vom $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ existieren.

3.3.11

Man zeige, daß \mathbb{R} als Vektorraum über \mathbb{Q} keine endliche Dimension besitzt.

Angenommen, \mathbb{R} hat über \mathbb{Q} die Dimension k . Dann gibt es eine endliche Basis $B = (a_1, \dots, a_k)$ von \mathbb{R} über \mathbb{Q} . Das bedeutet

$$\mathbb{R} = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Q}\}.$$

Da \mathbb{Q} abzählbar ist, gibt es nur abzählbar viele Elemente der Form

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \quad \text{mit } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Q}.$$

Also wäre \mathbb{R} abzählbar, und das ist ein Widerspruch.

Dieser Vektorraum besitzt übrigens auch keine abzählbare Basis, da auch die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen noch abzählbar ist.

3.3.12

Man zeige: Im Vektorraum V der reellen Funktionen ist die Menge

$$\{f_a \mid f_a(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{falls } x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, a \in \mathbb{R}\}$$

linear unabhängig.

Zu zeigen ist: Jede endliche Teilmenge T von

$$A := \{f_a \mid f_a(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{falls } x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, a \in \mathbb{R}\}$$

ist linear unabhängig.

Dies zeigen wir durch vollständige Induktion über die Anzahl der Elemente der Menge T .

Für $|T| = 1$ sei $T = \{f_a\}$ und $\gamma \cdot f_a = 0$ (die Nullfunktion). Für ein $x < a$ gilt dann $f_a(x) \neq 0$ und aus $\gamma \cdot f_a(x) = 0$ folgt daher $\gamma = 0$.

Sei nun jede Teilmenge $T \subset A$ mit $|T| = n$ linear unabhängig. Wir betrachten $n+1$ paarweise verschiedene Funktionen $f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_{n+1}}$ aus A und nehmen o.B.d.A. an, daß $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ gilt (sonst kann man die Funktionen umbenennen). Wählt man ein β mit $a_n < \beta < a_{n+1}$, so ist $f_{a_j}(\beta) = 0$ für $j = 1, 2, \dots, n$. Aus dem Ansatz $\alpha_1 f_{a_1} + \dots + \alpha_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0$ folgt daher

$$\begin{aligned} (\alpha_1 f_{a_1} + \dots + \alpha_{n+1} f_{a_{n+1}})(\beta) &= \alpha_1 f_{a_1}(\beta) + \dots + \alpha_{n+1} f_{a_{n+1}}(\beta) \\ &= \alpha_{n+1} (\beta - a_{n+1})^3 = 0. \end{aligned}$$

Da $\beta \neq a_{n+1}$ ist, folgt $\alpha_{n+1} = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann aber weiter $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Damit ist $\{f_{a_1}, \dots, f_{a_{n+1}}\}$ linear unabhängig.

3.3.13

$X \neq \emptyset$ sei eine Menge, K ein Körper. Für $x \in X$ sei $e_x \in K^X$ definiert durch $e_x(y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } y \neq x \\ 1 & \text{falls } y = x \end{cases}$, und es sei $A := \{e_x \mid x \in X\}$.

a) Man zeige, daß A linear unabhängig ist.

b) Es gilt: $L(A) = K^X \iff X$ ist eine endliche Menge.

a) Es seien $e_{x_1}, \dots, e_{x_n} \in A$ paarweise verschiedene Funktionen; ferner seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ und $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i} = 0$. Zu zeigen ist $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Die Abbildung $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i} =: f$ ist der Nullvektor in K^X genau dann, wenn für

alle $x \in X$ gilt: $f(x) = 0$. Insbesondere gilt dann für alle x_j ebenfalls $f(x_j) = 0$. Nun ist aber

$$0 = f(x_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}\right)(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}(x_j) = \alpha_j e_{x_j}(x_j) = \alpha_j.$$

Für alle j ist also $\alpha_j = 0$, und das war zu zeigen.

b) Beweis von “ \implies ”:

Man betrachte die konstante Abbildung $f \in K^X$ mit $f(x) = 1$ für alle $x \in X$. Gilt $K^X = L(A)$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}$.

Angenommen, X ist nicht endlich. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$. Dafür gilt $e_{x_j}(x) = 0$ für $j = 1, \dots, n$. Es folgt

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}\right)(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{x_i}(x) = 0,$$

und das ist ein Widerspruch dazu, daß f konstant =1 sein soll. Also muß X endlich sein.

Beweis von “ \impliedby ”:

Da trivialerweise $L(A) \subseteq K^X$ gilt, bleibt $K^X \subseteq L(A)$ zu zeigen.

Da X endlich sein soll, sei o. B. d. A. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ist $f \in K^X$ beliebig gegeben, so zeigen wir $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) e_{x_i}$.

Für $k = 1, \dots, n$ gilt nämlich:

$$\left(\sum_{i=1}^n f(x_i) e_{x_i}\right)(x_k) = \sum_{i=1}^n f(x_i) (e_{x_i}(x_k)) = f(x_k)$$

Damit gilt $f(x) = \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) e_{x_i}\right)(x)$ für alle $x \in X$, also $f = \sum_{i=1}^n f(x_i) e_{x_i}$. Daher gilt $f \in L(A)$.

3.3.14

V sei Vektorraum der Dimension n und U Untervektorraum von V der Dimension m. Man bestimme die Dimension des Quotientenraumes V/U und gebe ein Verfahren an, wie man eine Basis von V/U finden kann.

Die folgende eingerahmte Behauptung (beachte dabei den Basisergänzungssatz), die anschließend bewiesen wird, liefert gleichzeitig das einfache Verfahren zur Bestimmung einer Basis des Quotientenraumes V/U .

Ergänzt man eine Basis a_1, \dots, a_m von U
 zu einer Basis $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ von V ,
 dann ist $a_{m+1} + U, \dots, a_n + U$
 eine Basis von V/U .

Zu zeigen ist, daß diese Vektoren aus V/U linear unabhängig sind und daß sie V/U erzeugen.

$\alpha)$ $a_{m+1} + U, \dots, a_n + U$ sind linear unabhängig.

Sei $\alpha_1(a_{m+1} + U) + \dots + \alpha_{n-m}(a_n + U) = 0 (= U)$. Nach den Rechenregeln im Quotientenraum folgt

$$(\alpha_1 a_{m+1} + \dots + \alpha_{n-m} a_n) + U = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_1 a_{m+1} + \dots + \alpha_{n-m} a_n \in U.$$

Es gibt also ein $x \in U$ mit $\alpha_1 a_{m+1} + \dots + \alpha_{n-m} a_n = x$. Für x existiert eine Darstellung $x = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_m a_m$, da a_1, \dots, a_m Basis von U ist. Also erhält man

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_{m+1} + \dots + \alpha_{n-m} a_n &= \beta_1 a_1 + \dots + \beta_m a_m \quad \text{oder} \\ -\beta_1 a_1 - \dots - \beta_m a_m + \alpha_1 a_{m+1} + \dots + \alpha_{n-m} a_n &= 0. \end{aligned}$$

Da a_1, \dots, a_n Basis von V ist, folgt hieraus insbesondere $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-m} = 0$, also sind $a_{m+1} + U, \dots, a_n + U$ linear unabhängig.

$\beta)$ $L(a_{m+1} + U, \dots, a_n + U) = V/U$

Es sei $a + U \in V/U$ und $a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m + \alpha_{m+1} a_{m+1} + \dots + \alpha_n a_n$. Wegen $a_1, \dots, a_m \in U$ ist dann $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m \in U$, d. h.

$$a + U = (\alpha_{m+1} a_{m+1} + \dots + \alpha_n a_n) + U = \alpha_{m+1} (a_{m+1} + U) + \dots + \alpha_n (a_n + U)$$

nach den Rechenregeln in V/U . Damit ist $L(a_{m+1} + U, \dots, a_n + U) = V/U$ gezeigt.

Nach dem Bewiesenen gilt für den Quotientenraum V/U :

$$\dim U + \dim V/U = n$$

3.3.15

a) Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = L((1, 1))$. Man beschreibe die Elemente von V/U und bestimme eine Basis von V/U .

b) Wie unter a) behandle man $V = \mathbb{R}^3$ und $U = L((-1, 0, 1))$. Man stelle $(4, 2, 1) + U$ als Linearkombination der Basiselemente dar.

a) Es ist

$$V/U = \{a + U \mid a \in V\} = \{a + L((1, 1)) \mid a \in \mathbb{R}^2\}.$$

Die Elemente von V/U sind also Geraden parallel zu $L((1, 1))$.

Wegen $\dim V/U = 1$ ist jedes vom Nullvektor ($= L((1, 1))$) verschiedene Element aus V/U Basis von V/U , also z. B. $(1, 0) + L((1, 1))$.

b) Entsprechend a) ist hier

$$V/U = \{a + L((-1, 0, 1)) \mid a \in \mathbb{R}^3\},$$

und dies sind Geraden im \mathbb{R}^3 parallel zu $L((-1, 0, 1))$.

Nach Aufgabe 13 erhält man eine Basis von V/U wie folgt: Man ergänzt $(-1, 0, 1)$ zu einer Basis vom \mathbb{R}^3 , z. B. zu $(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$. Die Restklassen, in denen die ergänzten Vektoren liegen, bilden dann eine Basis von V/U . Das ergibt hier $(1, 0, 0) + U, (0, 1, 0) + U$ als Basis von V/U .

Zur Darstellung von $(4, 2, 1) + U$ als Linearkombination dieser Basiselemente führt der Ansatz

$$(4, 2, 1) + U = \alpha((1, 0, 0) + U) + \beta((0, 1, 0) + U)$$

auf $(4, 2, 1) - \alpha(1, 0, 0) - \beta(0, 1, 0) \in U$. Es gibt also ein γ mit

$$(4, 2, 1) - \alpha(1, 0, 0) - \beta(0, 1, 0) = \gamma(-1, 0, 1).$$

Die Lösung des zugehörigen linearen Gleichungssystems liefert $\alpha = 5, \beta = 2, \gamma = 1$, die gesuchte Linearkombination lautet damit:

$$(4, 2, 1) + U = 5((1, 0, 0) + U) + 2((0, 1, 0) + U)$$

3.3.16

V sei der Vektorraum der Polynome vom Grade ≤ 2 über \mathbb{R} . Ferner sei $p = x^2 - 3x + 2 \in V$ und $U = L(x^2 - 3x + 2)$.

a) Man bestimme eine Basis von V/U .

b) Man schreibe $2x^2 - 5x + 7 + U$ als Linearkombination dieser Basis.

a) Wir gehen wie bei der vorigen Aufgabe vor:

$1, x, x^2 - 3x + 2$ ist nach Aufgabe 6 eine Basis von V , die p enthält. Damit ist $1 + U, x + U$ eine Basis von V/U .

b) Der Ansatz

$$\alpha(1 + U) + \beta(x + U) = 2x^2 - 5x + 7 + U$$

führt auf $\alpha + \beta x - 2x^2 + 5x - 7 \in U$. Also gibt es ein γ mit

$$-2x^2 + (5 + \beta)x + \alpha - 7 = \gamma(x^2 - 3x + 2).$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $\alpha = 3$ und $\beta = 1$. Es gilt also:

$$3(1 + U) + (x + U) = 2x^2 - 5x + 7 + U$$

3.3.17

V sei Vektorraum über K , U Untervektorraum von V . Man zeige:

Sind $a_1 + U, \dots, a_n + U$ linear unabhängig im Quotientenraum V/U , so sind a_1, \dots, a_n linear unabhängig in V .

Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes?

Es sei $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$. Der Übergang zu Restklassen liefert

$$(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) + U = 0.$$

Die Anwendung der Rechenregeln im Quotientenraum ergibt

$$\alpha_1 (a_1 + U) + \dots + \alpha_n (a_n + U) = 0.$$

Da nach Voraussetzung $a_1 + U, \dots, a_n + U$ im Quotientenraum linear unabhängig sind, folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht für $\dim U \geq 2$.

Sind nämlich z. B. a_1, a_2 linear unabhängig in U (und damit auch in V), so gilt im Quotientenraum

$$a_1 + U = a_2 + U = U = 0,$$

also sind $a_1 + U, a_2 + U$ linear abhängig im Quotientenraum.

3.3.18

Eine reelle 3×3 -Matrix \mathbf{A} heißt **magisches Quadrat**, wenn es eine Zahl α gibt, so daß jede Zeilensumme, jede Spaltensumme, die Summe der Hauptdiagonalelemente und die Summe der Nebendiagonalelemente gleich α ist. Sei $U := \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid \mathbf{A} \text{ ist magisches Quadrat}\}$. Man zeige, daß U ein Untervektorraum von $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ist und bestimme die Dimension sowie eine Basis von U .

Wir geben zunächst ein einfaches Beispiel für ein magisches Quadrat an. Dabei ist $\alpha = 6$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Für eine Matrix \mathbf{A} sei $s(\mathbf{A})$ im Falle der Existenz die gemeinsame Zeilensumme, Spaltensumme, Summe der Hauptdiagonalglieder und Summe der Nebendiagonalglieder von \mathbf{A} .

Wegen $s(\mathbf{0}) = 0$ gilt $\mathbf{0} \in U$, also gilt (U1).

Sind \mathbf{A} und \mathbf{B} aus U , so existieren $s(\mathbf{A})$ und $s(\mathbf{B})$. Man sieht sofort, daß dann auch $s(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ existiert. Es ist nämlich $s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = s(\mathbf{A}) + s(\mathbf{B})$. Damit folgt $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in U$, also gilt (U2).

Entsprechend folgt für $\mathbf{A} \in U$ und $c \in \mathbb{R}$ direkt $s(c\mathbf{A}) = cs(\mathbf{A})$, und damit gilt auch (U3). Also ist U ein Untervektorraum von $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, speziell für $n = 3$.

Es sei $\mathbf{A} \in U$ und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}.$$

Addiert man Hauptdiagonalglieder, Nebendiagonalglieder und Glieder der zweiten Spalte, so erhält man die Summe der Glieder der ersten und letzten Zeile plus $3a_5$. Es gilt also $3s(\mathbf{A}) = 2s(\mathbf{A}) + 3a_5$. Damit ist a_5 durch die Zeilensumme eindeutig bestimmt, nämlich $a_5 = \frac{1}{3}s(\mathbf{A})$. Sind also a_1, a_2, a_3 gegeben, so ist $s(\mathbf{A})$ bekannt, und damit a_5 eindeutig bestimmt. Wir zeigen nun, daß dann auch alle anderen Elemente von \mathbf{A} eindeutig bestimmt sind. Es ist dann nämlich:

$$\begin{aligned} a_8 &= s(\mathbf{A}) - a_2 - a_5 = \frac{2}{3}s(\mathbf{A}) - a_2 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \\ a_9 &= s(\mathbf{A}) - a_1 - a_5 = \frac{2}{3}s(\mathbf{A}) - a_1 = -\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \\ a_7 &= s(\mathbf{A}) - a_3 - a_5 = \frac{2}{3}s(\mathbf{A}) - a_3 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_3 \\ a_4 &= s(\mathbf{A}) - a_1 - a_7 = \frac{1}{3}s(\mathbf{A}) - a_1 + a_3 = -\frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3 \\ a_6 &= s(\mathbf{A}) - a_3 - a_9 = \frac{1}{3}s(\mathbf{A}) - a_3 + a_1 = \frac{4}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 - \frac{2}{3}a_3 \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, daß

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

eine Basis von U ist. Nennt man diese Matrizen in obiger Reihenfolge $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$, und ist $\mathbf{A} \in U$ Matrix mit erster Zeile $(a_1 \ a_2 \ a_3)$, so zeigt die obige Rechnung, daß

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{C}_1 + a_2\mathbf{C}_2 + a_3\mathbf{C}_3$$

gilt, also ist $U = L(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3)$. Die angegebenen Matrizen sind aber auch linear unabhängig, wie die ersten Zeilen zeigen. Also bilden sie eine Basis von U , und es ist $\dim U = 3$.

Für das obige Beispiel ergibt sich die folgende Linearkombination:

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_2 + 6\mathbf{C}_3$$

3.3.19

Im Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Zahlenfolgen (a_0, a_1, a_2, \dots) wird durch zwei Anfangsglieder $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und die Rekursion $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n \geq 0$ ein Element, also eine Zahlenfolge, definiert.

- Man zeige, daß die Menge aller Folgen, die die Rekursion erfüllen, ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.
- Man bestimme eine Basis und die Dimension von U .
- Für den Fall $a_0 = a_1 = 1$ bestimme man eine geschlossene Formel für a_n .

a) Die Nullfolge $0 = (0, 0, 0, \dots)$ erfüllt die Rekursion, gehört also zu U . Damit ist (U1) erfüllt.

Erfüllen (a_0, a_1, a_2, \dots) und (b_0, b_1, b_2, \dots) die Rekursion, dann auch die Folge $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$; es gilt also (U2).

Da aus $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $r \in \mathbb{R}$ auch $ra_{n+2} = ra_{n+1} + ra_n$ folgt, ist mit der Folge (a_0, a_1, a_2, \dots) auch die Folge $r(a_0, a_1, a_2, \dots) = (ra_0, ra_1, ra_2, \dots)$ aus U , was (U3) zeigt. U ist also ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) Da zwei Anfangsglieder frei wählbar sind und die anderen Glieder der Folgen aus U dann dadurch festgelegt sind, liegt der Verdacht nahe, daß U die Dimension 2 besitzt. Wir werden zeigen, daß die Folgen

$$x = (1, 0, \dots), \quad y = (0, 1, \dots),$$

die gemäß der Rekursion fortgesetzt werden, damit sie in U liegen, eine Basis von U bilden. Die Folgen x, y sind linear unabhängig, da aus $\alpha x + \beta y = (0, 0, \dots)$ durch Betrachtung der ersten beiden Komponenten direkt $\alpha = \beta = 0$ folgt. Sie erzeugen auch U , da für $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in U$ gilt: $a = a_0 x + a_1 y$. Dazu beweisen wir $a_n = a_0 x_n + a_1 y_n$ durch vollständige Induktion über n .

Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt das trivialerweise.

Sei $n \geq 2$ und für alle $k < n$ gelte $a_k = a_0 x_k + a_1 y_k$. Für a_n folgt dann:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} = a_0 x_{n-1} + a_1 y_{n-1} + a_0 x_{n-2} + a_1 y_{n-2} = \\ &= a_0 (x_{n-1} + x_{n-2}) + a_1 (y_{n-1} + y_{n-2}) = a_0 x_n + a_1 y_n \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen ergibt sich dabei durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung, wobei man hier wegen der Rekursion durch zwei vorhergehende Glieder den Induktionsanfang – wie wir es durchgeführt haben – für zwei Anfangszahlen benötigt.

Damit ist gezeigt worden, daß U die Dimension 2 besitzt.

c) Für den Fall $a_0 = a_1 = 1$ erhält man die Folge

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots),$$

die als **FIBONACCI-Folge** bezeichnet wird. Um eine geschlossene Formel für a_n zu erhalten, arbeitet man mit einem Trick. Man wählt als Basis von U nicht die unter b) angegebene naheliegende Basis, sondern sucht eine Basis aus geometrischen Folgen. Wenn eine geometrische Folge $(1, q, q^2, q^3, \dots)$ die Rekursion erfüllen soll, so gilt $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$, oder (da $q \neq 0$) $q^2 = q + 1$. Diese **quadratische Gleichung** besitzt die beiden Lösungen $q_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Umgekehrt erfüllen die durch q_1 und q_2 gegebenen geometrischen Folgen

$$x = (1, q_1, q_1^2, q_1^3, \dots) \quad \text{und} \quad y = (1, q_2, q_2^2, q_2^3, \dots)$$

auch die Rekursion, sind also Elemente von U , und auch linear unabhängig, wie sich aus $q_1 \neq q_2$ sofort ergibt. Also muß sich die FIBONACCI-Folge a aus diesen beiden Folgen x und y linear kombinieren lassen, d. h. es gibt reelle Zahlen α, β mit $a = \alpha x + \beta y$. Die ersten beiden Komponenten liefern:

$$1 = \alpha + \beta, \quad 1 = \alpha q_1 + \beta q_2$$

Es folgt:

$$\alpha = \frac{1 - q_2}{q_1 - q_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + 1 \right), \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{-\sqrt{5}}{5} + 1 \right)$$

Für die Komponente a_n von der FIBONACCI-Folge a gilt dann $a_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$, und das ergibt die geschlossene Formel:

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right)^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \left(\frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \right)^n$$

Bemerkenswert an dieser Formel ist, daß sich trotz der irrationalen Summanden für jedes n natürliche Zahlen ergeben. Ferner reicht zur Berechnung von FIBONACCI-Zahlen ¹ der erste Summand dieser Formel aus, da der zweite Summand für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

3.3.20

Man bestimme die Anzahl der geordneten Basen eines n -dimensionalen Vektorraumes V über einem endlichen Körper K mit $|K| = k$.

Ein n -dimensionaler Vektorraum V über K ist isomorph zum K^n . Wir betrachten also $V = K^n$, und da K endlich ist, gilt $|V| = |K^n| = k^n$.

Es sei $b(i) :=$ Anzahl der i -Tupel von Vektoren aus K^n , bei denen die Vektoren linear unabhängig sind.

Für $b(i)$ werden wir nun die folgende Rekursionsformel beweisen:

$$b(i+1) = b(i) (k^n - k^i) \quad (i \geq 1)$$

Aus der Definition von $b(i)$

$$b(i) = | \{ (a_1, \dots, a_i) \mid \{a_1, \dots, a_i\} \subseteq V \text{ und } a_1, \dots, a_i \text{ linear unabhängig} \} |$$

ergibt sich

$$b(i+1) = | \{ (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}) \mid \{a_1, \dots, a_i\} \subseteq V \text{ und } a_{i+1} \in V \setminus L(a_1, \dots, a_i) \text{ und } a_1, \dots, a_i \text{ linear unabhängig} \} |$$

¹Die FIBONACCI-Zahlen tauchen in vielen Teilgebieten der Mathematik auf, z. B. auch als gewisse Summen im PASCAL-Dreieck (siehe Seite 26).

Aus $|V| = k^n$ und $\dim L(a_1, \dots, a_i) = i$ folgt:

$$|V \setminus L(a_1, \dots, a_i)| = k^n - k^i$$

Damit erhält man die angegebene Rekursionsformel. Wegen $b(1) = k^n - 1$ (beachte, daß nur der Nullvektor als einzelner Vektor linear abhängig ist), folgt nun durch Induktion nach i sofort:

$$b(i) = \prod_{j=0}^{i-1} (k^n - k^j) \quad \text{speziell} \quad b(n) = \prod_{j=0}^{n-1} (k^n - k^j)$$

3.3.21

Man gebe alle Basen vom Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$ an.

Für $k = 2$ und $n = 3$ erhält man aus der Formel der vorigen Aufgabe

$$\prod_{j=0}^2 (2^3 - 2^j) = 168$$

Basen von $(\mathbb{Z}_2)^3$. Wegen

$$(\mathbb{Z}_2)^3 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

gibt es $\binom{7}{3} = 35$ dreielementige Teilmengen von $(\mathbb{Z}_2)^3$, die $(0, 0, 0)$ nicht enthalten. 7 Mengen davon (nämlich diejenigen, bei denen der dritte Vektor die Summe der ersten beiden ist) sind linear abhängig, alle anderen sind linear unabhängig, führen also zu Basen von $(\mathbb{Z}_2)^3$. Es werden daher nur die 7 dreielementigen Mengen (ohne Nullvektor) aufgelistet, die zu keinen Basen führen:

$$\begin{array}{ll} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\} & \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\} \\ \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\} & \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \\ \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\} & \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\} \\ \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\} & \end{array}$$

Alle anderen 28 dreielementigen Teilmengen, die den Nullvektor nicht enthalten, liefern jeweils $3! = 6$ Basen (durch Permutation der Elemente).